Apprendre chapter Probabilités et Variables aléatoires discrètes

1) Qu'est ce qu'un événement?
2) Quelle est la définition d'une probabilité?
3) Citer le théorème de la limite monotone.
4) Citer la formule des probabilités totales.
5) Définition de l'indépendance.
6) Donner la définition d'une variable aléatoire.
7) Définition du moment d'ordre r pour une variable aléatoire.
8) Citer le théorème de transfert.
9) Vrai ou faux: Toute var ayant une variance a une espérance.
10) Vrai ou faux: Si X a une espérance, alors $|X|$ a aussi une espérance.
11) Vrai ou faux: Si la variance d'une var X est nulle, alors X est nulle .
12) Vrai ou faux: Il existe des var n'ayant pas d'espérance.
13) a) On pose $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$; montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définit une loi de probabilités. On note alors X une var dont la loi est donnée par $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(X=n)=u_n$

b) Montrer que X ne possède pas d'espérance.

c) Montrer que la var $Y=\sqrt{X}$ possède une espérance (on ne cherchera pas à la calculer.

14) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(X=n)=\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}$; Montrer que X possède une espérance, puis que cette espérance vaut $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$. Justifier que X ne possède pas de variance.

15) Je donne la définition d'une var suivant une loi géométrique de paramètre p, son espérance et sa variance.

16) Je donne la définition d'une var suivant une loi de Poisson de paramètre λ , son espérance et sa variance.

17) Je prouve le résultat: si X suit une loi de Poisson de paramètre λ et Y suit une loi de Poisson de paramètre μ et X et Y sont indépendantes, alors $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

18) Vrai ou faux : si X suit une loi de Poisson de paramètre λ , alors $P(X>0)=1$.

19) Vrai ou faux : si X suit une loi géométrique de paramètre p, alors $P(X>0)=1$.

20) Vrai ou Faux: si X suit une loi géométrique de paramètre p, alors $P(X>n)=(1-p)^n$.

21) Soit $p \in]0,1[$, la fonction de répartition F d'une var X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifie:

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad , \quad F(n)=1-(1-p)^n$; donner la loi de X.

22) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; on considère une var X telle que $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X=n)=\alpha\dfrac{2n^2+1}{n!}$.

a) Calculer α .
b) Montrer que X admet une espérance et la calculer.

23) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$; le nombre de clients Y d'un magasin en une journée suit une loi de Poisson de paramètre λ . Pout payer ses achats, chaque client utilise au hasard une des n caisses mises à sa disposition.On suppose que tous les clients prennent au moins un objet (et le paient…).
On note X le nombre de clients utilisant la caisse numéro 1 par jour. Montrer que la loi de X sachant $[Y=i]$ est une loi binomiale de paramètres i et $\dfrac{1}{10}$. En déduire la loi de X.